11 Rectas y ángulos

Los ríos Tigris y Éufrates fueron la cuna de una antiquísima civilización. Hace 3500 años los babilonios eran ya grandes astrónomos: predecían eclipses, controlaban los movimientos de estrellas y planetas y establecieron el calendario.

Para realizar esas actividades, hubieron de dominar la medida y el manejo de los ángulos, imprescindibles para precisar la posición de los astros en el firmamento. Este dominio lo aplicaron también en la construcción, en la agrimensura (medición de campos) y en la navegación.

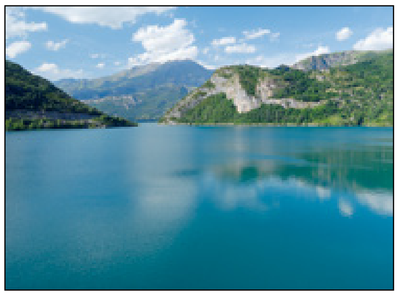
La unidad de medida de ángulos la determinaron dividiendo el círculo en 360 grados. Pero ¿por qué esta cantidad?

En un principio, creyeron que el año tenía 360 días, y cada grado era el ángulo que recorría "el Sol alrededor de la Tierra" cada día.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

1 Elementos geométricos básicos

Plano, puntos, rectas, …



- **PLANO**

La superficie del agua en calma (el mar, un lago o embalse, una piscina), la superficie de la mesa, una hoja de papel… son imágenes del plano con tal de que las imaginemos extendiéndose indefinidamente en todas las direcciones.

- **PUNTO**

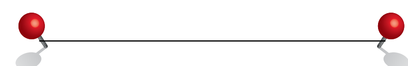
Una marca sobre el papel con la punta del lápiz o un pinchazo con un alfiler son buenas representaciones de puntos.

Un punto carece de dimensiones.

A los puntos se les suele denominar con letras mayúsculas: A, M, P…

- **RECTA**

Un hilo tenso, la marca que deja un pliegue en una hoja de papel, el borde de la mesa o de la regla son representaciones adecuadas de rectas.



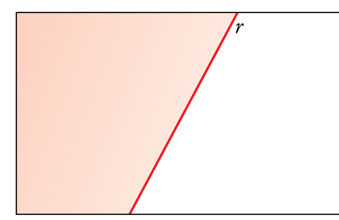
Una recta carece de grosor y se extiende indefinidamente en los dos sentidos.

Las rectas se suelen designar mediante letras minúsculas: r, s, t…

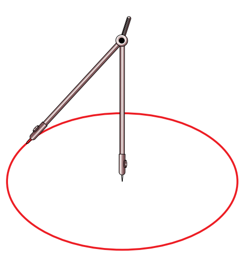
- **SEMIPLANO**

Una recta r divide al plano en dos partes. Cada una de ellas, junto con la propia recta, es un semiplano.

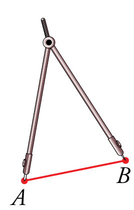
La recta se llama *borde* del semiplano.



El compás sirve para hacer circunferencias…



…pero también se utiliza para tomar distancias y transportarlas.



- **SEMIRRECTA**

Un punto, A, sobre una recta la divide en dos partes. Cada una de ellas, junto al propio punto, es una semirrecta.

El punto A es su *origen*.

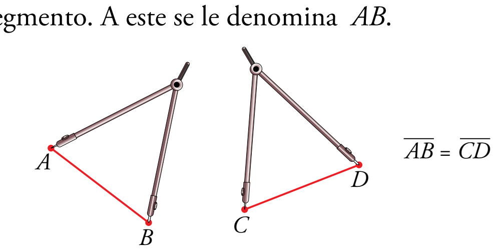
- **SEGMENTO**

El trozo de recta comprendido entre dos de sus puntos, A y B, incluyendo estos, es un segmento.

A y B son los *extremos* del segmento. A este se le denomina AB.

La longitud de un segmento es la distancia entre sus extremos. Se designa $\overline{AB}$.

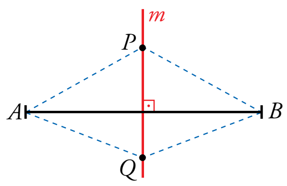
Decimos que dos segmentos son iguales si tienen la misma longitud.



Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

2 Dos rectas importantes

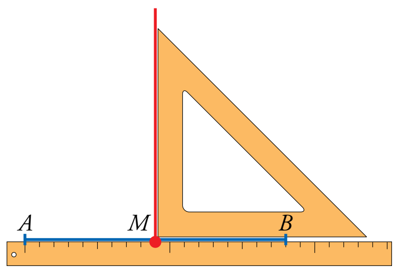
Mediatriz de un segmento



La **mediatriz** de un segmento, AB, es la recta perpendicular al segmento en su punto medio.

Propiedad fundamental: Los puntos de la mediatriz equidistan (están a igual distancia) de los extremos del segmento:

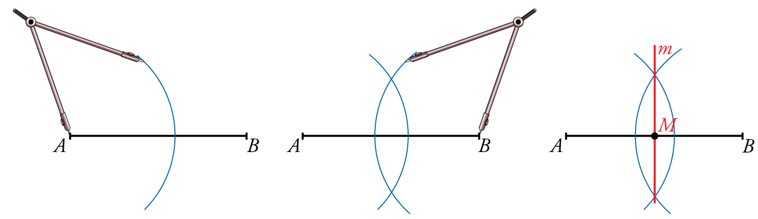
$$\overline{PA} = \overline{PB} \qquad \overline{QA} = \overline{QB}$$



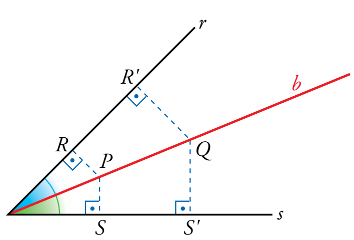
Trazado de la mediatriz con regla y escuadra.

Esta propiedad le confiere a esta recta una gran importancia en el estudio de figuras geométricas, triángulos, simetrías, etc.

Observa cómo se construye la mediatriz con regla y compás:



Bisectriz de un ángulo

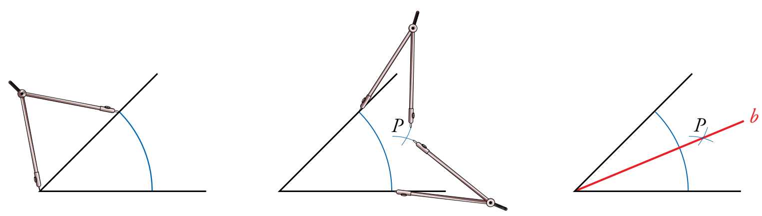


La **bisectriz** de un ángulo es una semirrecta que divide al ángulo en otros dos ángulos iguales.

Los puntos de la bisectriz equidistan (están a igual distancia) de los lados del ángulo:

$$\overline{PR} = \overline{PS} \qquad \overline{QR'} = \overline{QS'}$$

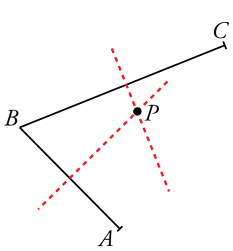
Observa cómo se traza la bisectriz con regla y compás:



Piensa y practica

1. Dibuja dos segmentos concatenados, AB y BC. Traza sus mediatrices y llama P al punto en que se cortan.

— Comprueba que $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$.

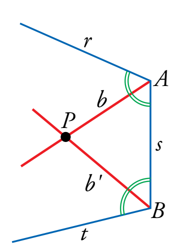


— Razona por qué P está a la misma distancia (equidista) de A, de B y de C.

2. Dibuja en tu cuaderno dos ángulos $\widehat{rs}$ y $\widehat{st}$ como se ve en la figura.

— Traza sus bisectrices, b y b', que se cortan en un punto P.

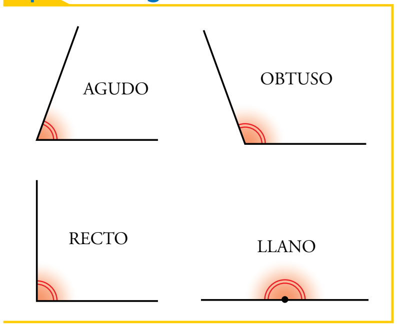
— Razona que las distancias del punto P a las rectas r, s y t coinciden.



Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

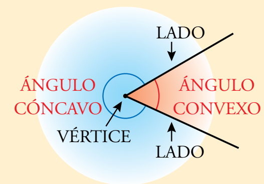
3 Ángulos

Tipos de ángulos

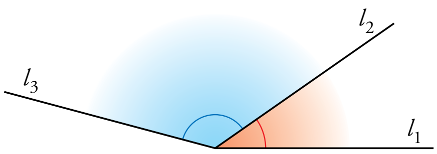


Un par de semirrectas con origen común delimitan dos ángulos: uno convexo (en rojo) y otro cóncavo (en azul).

Las semirrectas se llaman **lados** del ángulo, y el punto común, **vértice.**

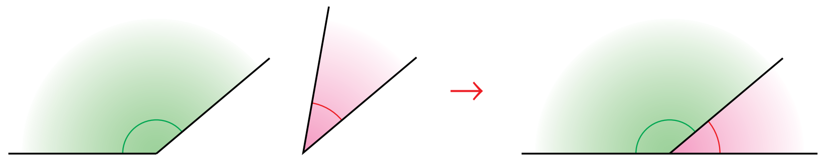


- Dos ángulos (rojo y azul) se llaman **consecutivos** cuando tienen el mismo vértice y un lado común, l_2.



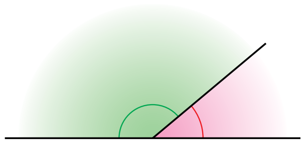
El ángulo cuyos lados son l_1 y l_3 es la **suma** de los dos anteriores.

- Dos ángulos son **suplementarios** si su suma es un ángulo llano.



En la web
Practica clasificando ángulos.

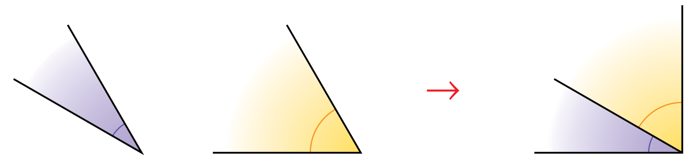
- Dos ángulos se llaman **adyacentes** cuando son consecutivos y suplementarios.



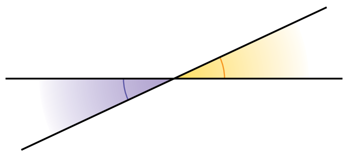
A propósito de su nombre, *ad yacentes*: cada uno yace junto al otro.

En la web
Practica encontrando el ángulo complementario o suplementario.

- Dos ángulos son **complementarios** si su suma es un ángulo recto.



- Dos ángulos son **opuestos por el vértice** cuando los lados de uno son semirrectas opuestas a los del otro.



Dos ángulos opuestos por el vértice son iguales.

Piensa y practica

1. ¿Verdadero o falso?

a) Si dos ángulos suplementarios son iguales, entonces ambos son rectos.

b) Dos ángulos complementarios no pueden ser iguales.

c) El suplementario de un águlo agudo es un ángulo obtuso.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

4 Relaciones angulares

Ten en cuenta

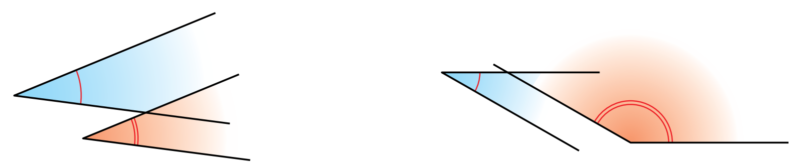
Hay ciertas configuraciones que se repiten con frecuencia y, por tanto, conviene tenerlas estudiadas. Es lo que ocurre con las que presentamos en esta página: ángulos con sus lados paralelos y, sobre todo, la colección de ángulos que se generan al cortar con una recta dos rectas paralelas entre sí.

En la web

Practica averiguando qué ángulos se forman cuando una secante corta a dos rectas paralelas.

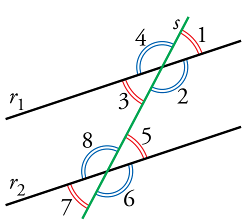
Ángulos de lados paralelos

Dos ángulos cuyos lados son paralelos o son iguales o son suplementarios.



Ángulos que se forman cuando una recta corta a otras dos rectas paralelas entre sí

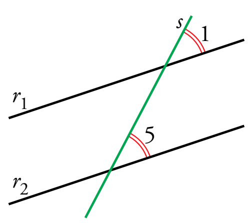
Si dos rectas paralelas son cortadas por otra recta, se forman ocho ángulos, muchos de los cuales son iguales entre sí por tener sus lados paralelos.



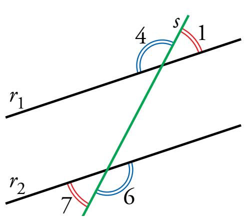
- $\hat{1} = \hat{3}$ por ser **opuestos por el vértice.**

  Por lo mismo:

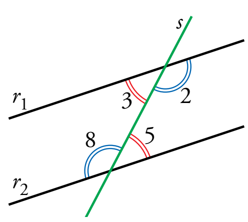
  $\hat{2} = \hat{4}$ $\quad \hat{5} = \hat{7}$ $\quad \hat{6} = \hat{8}$



- $\hat{1} = \hat{5}$. Los ángulos $\hat{1}$ y $\hat{5}$ se llaman **correspondientes** porque están en la misma posición respecto a r_1 y a r_2. También son correspondientes $\hat{2}$ y $\hat{6}$, $\hat{3}$ y $\hat{7}$, $\hat{4}$ y $\hat{8}$.



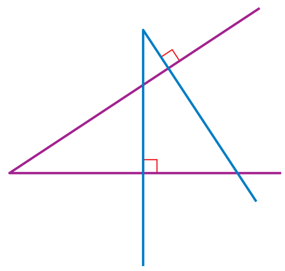
- $\hat{1} = \hat{7}$. Los ángulos $\hat{1}$ y $\hat{7}$ son **alternos externos** porque están a distintos lados de la recta *s* (alternos) y en la zona exterior de las dos paralelas (externos). También son alternos externos $\hat{4}$ y $\hat{6}$.



- $\hat{3} = \hat{5}$. Los ángulos $\hat{3}$ y $\hat{5}$ son **alternos internos** porque están a distintos lados de *s* y en la zona interior de las paralelas. También son alternos internos $\hat{2}$ y $\hat{8}$.

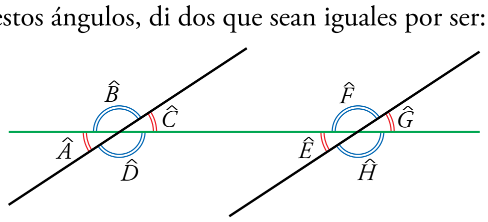
Piensa y practica

1. Dos ángulos de lados perpendiculares pueden ser iguales, pero también pueden ser suplementarios.



Justifícalo en tu cuaderno con un dibujo.

2. De estos ángulos, di dos que sean iguales por ser:



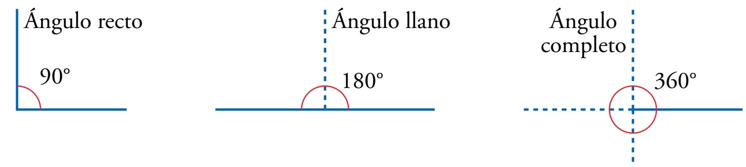
a) Opuestos por el vértice. b) Correspondientes.

c) Alternos internos. d) Alternos externos.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

5 Medida de ángulos. Operaciones

Recuerda que un ángulo recto tiene 90°. Por tanto, los ángulos *llano y completo* tienen 180° y 360°, respectivamente.



Etimología

Minutus, en latín, significa *menudo*, *diminuto*, y así se le llamó a este pequeño angulillo de 1/60 de grado.

Al tomar otro menor aún, se le llamó **segundo trozo menudo,** es decir, por segunda vez pequeño, más pequeño todavía. Es el **segundo,** 1/60 de minuto = 1/3 600 de grado.

El **grado** (1/90 de ángulo recto) es la unidad de medida de ángulos.

Para afinar en la medida de ángulos, se utilizan los submúltiplos del grado:

minuto $\longrightarrow 1' = \frac{1}{60}$ de grado. Es decir, $1° = 60'$.

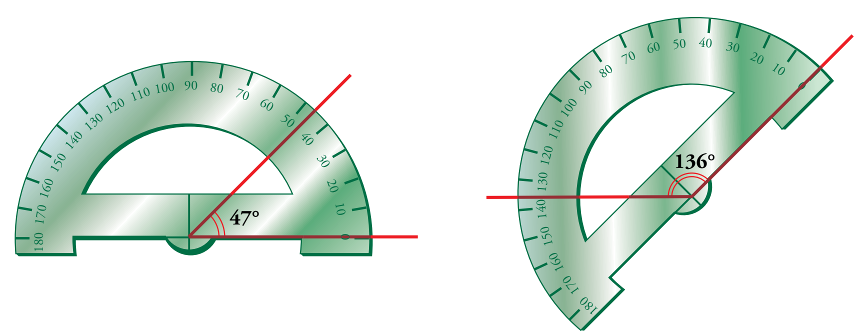
segundo $\longrightarrow 1'' = \frac{1}{60}$ de minuto. Es decir, $1' = 60''$.

A estos grados se les llama **sexagesimales** por la forma de dividirse, de 60 en 60.

Tomar 60 como base de numeración tiene su origen, posiblemente, en una forma de contar basada en los cinco dedos de una mano y en las doce falanges de los dedos índice, corazón, anular y meñique de la otra mano ($5 \cdot 12 = 60$).

Instrumentos de medida de ángulos

Para medir ángulos dibujados sobre el papel, se utiliza el **transportador.**



SEXTANTE: instrumento para medir ángulos.

Para medidas angulares sobre el terreno existen otros instrumentos mucho más precisos, como el sextante, el goniómetro y el teodolito.

Expresión de un ángulo en grados y minutos

¿Qué significa un ángulo de 37° 40'? Es un ángulo mayor que 37° y menor que 38°. En concreto, mide 37 grados más 40/60 de grado.

¿Tiene sentido un ángulo de 24° 256'? No es una forma correcta de expresar un ángulo, pues 256' es más que un grado. Veámoslo:

$$\begin{array}{r|l} 246 & 60 \\ \hline 16 & 4 \end{array}$$

Es decir, $256' = 4 \cdot 60' + 16' = 4°\ 16'$

Por tanto, $24°\ 256' = 24° + 4°\ 16' = 28°\ 16'$.

Nota

Este curso vamos a trabajar solo con ángulos en grados y minutos.

Al expresar un ángulo en grados y minutos, el número de minutos ha de ser menor que 60.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Suma de ángulos

Para sumar dos ángulos expresados en grados y minutos, se suman por separado los grados y los minutos. Después, si el número de minutos es mayor que 60, se pasan a grados.

$$\begin{array}{rrr} & 36° & 45' \\ + & 82° & 56' \\ \hline & 118° & 101' \end{array} = 118° + 1° 41' – 119'' 41'$$

$$\begin{array}{r|l} 101 & 60 \\ \cline{2-2} 41 & 1 \end{array} \qquad 101' = 1° 41'$$

Cálculo mental

Efectúa.

a) 23° 35' + 48° 22'

b) 31° 40' + 23° 20'

c) 31° 42' + 23° 25'

Resta de ángulos

Suponemos que el minuendo es mayor que el sustraendo. Si el número de minutos del minuendo es mayor que el del sustraendo, la operación se realiza de inmediato. Si no, se procede como en el siguiente ejemplo:

$$\begin{array}{rrr} & 56° & 31' \\ – & 32° & 43' \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rrr} & 56° & 31' \\ – & 32° & 43' \\ \hline & 23° & 48' \end{array}$$

← (hemos convertido 1° en 60').

Cálculo mental

Efectúa.

a) 87° 58' – 36° 25'

b) 87° – 36° 20'

c) 87° 10' – 36° 20'

Producto de un ángulo por un número natural

Para multiplicar un ángulo por un número natural, se efectúan los productos de los minutos y de los grados por ese número. Después, si el resultado de los minutos es mayor que 60, se pasan a grados los que corresponda.

$$(32° 47') \times 7 \Rightarrow \begin{array}{rr} & 32° \\ \times & 7 \\ \hline & 224° \end{array} \quad \begin{array}{rr} & 47' \\ \times & 7 \\ \hline & 329' \end{array} \rightarrow 224° 329' = 224° + 5° 29' = 229° 29'$$

$$\begin{array}{r|l} 329 & 60 \\ \cline{2-2} 29 & 5 \end{array} \qquad 329' = 5° 29'$$

Cálculo mental

Efectúa.

a) (20° 10') × 3

b) (20° 20') × 3

c) (20° 25') × 3

División de un ángulo entre un número natural

Para dividir un ángulo por un número natural, se dividen los grados y el resto se pasa a minutos, que se añaden a los que había. Después, se dividen los minutos.

$$(97° 15') : 7 \Rightarrow \begin{array}{rr|l} 97° & 15 & 7 \\ \cline{3-3} 27 & & 13° 53' \\ 6° \rightarrow & 360' & \\ \cline{1-2} & 375' & \\ & 25' & \\ & 4' & \end{array}$$

13° 53' → El cociente es 13° 53'.

4' ⟶ El resto es 4'.

Cálculo mental

Efectúa.

a) (42° 36') : 3

b) 91° : 3

c) (91° 30') : 3

Piensa y practica

1. Efectúa las siguientes operaciones:

a) 47° 25' + 56° 11' + 17° 49'   b) 37° 53' – 29° 49'

c) 68° 42' + 11° 3' + 43° 39'   d) 52° 41' – 36° 55'

2. Realiza estas operaciones:

a) (38° 43') × 8   b) (24° 55') × 10   c) (27° 42') × 5

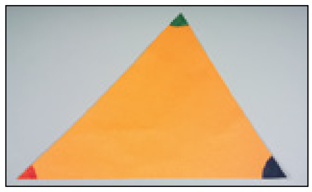
d) (76° 39') : 5   e) (89° 21') : 2   f) (115° 44') : 7

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

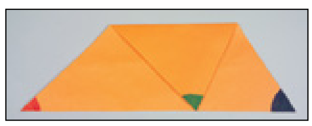
6 Ángulos en los polígonos

Observa

Ángulos de un triángulo



Recorta un triángulo cualquiera y colorea cada vértice de un color por ambas caras. Señala los puntos medios de dos de los lados.



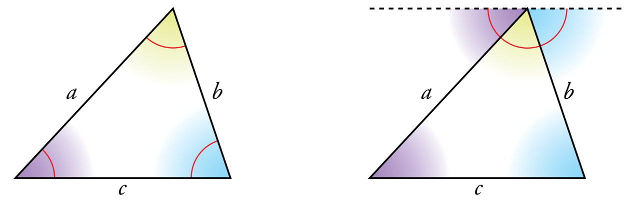
Pliega por la línea que une los puntos medios.

Pliega los otros dos vértices.

Al coincidir los tres ángulos, se aprecia que suman 180°.

Suma de los ángulos de un triángulo

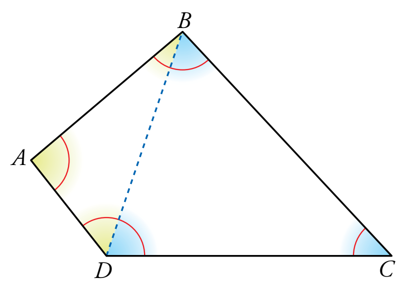
Para hallar la suma de los ángulos de un triángulo, trazamos por uno de sus vértices la paralela al lado opuesto y razonamos del siguiente modo:



Los ángulos morados son iguales por ser alternos internos al cortar las paralelas por la recta *a*. Lo mismo les ocurre a los azules con la recta *b*. Ahora, es claro que entre los tres completan un ángulo llano; es decir, suman 180°.

La suma de los tres ángulos de cualquier triángulo es 180°.

Suma de los ángulos de un cuadrilátero



Mediante la diagonal, el cuadrilátero se parte en dos triángulos.

La suma de los ángulos de cada triángulo es 180°.

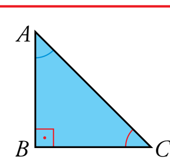
Los ángulos de los dos triángulos suman 180° · 2 = 360°.

La suma de los ángulos de cualquier cuadrilátero es 360°.

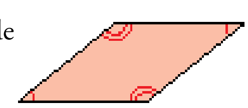
Como los cuadrados y los rectángulos tienen los cuatro ángulos iguales, cada uno de ellos mide 360° : 4 = 90°, como ya sabíamos.

Piensa y practica

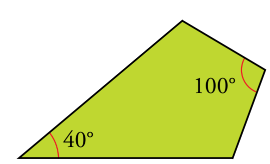
1. En un triángulo rectángulo, $\hat{A}$ mide 42° 20'. ¿Cuánto mide $\hat{C}$?



2. Si un ángulo de un rombo mide 39°, ¿cuánto miden los demás?



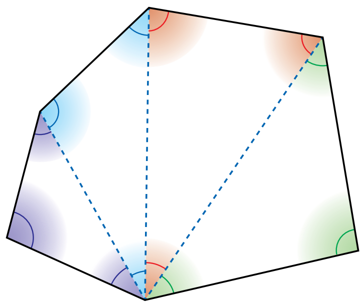
3. ¿Cuánto miden los ángulos iguales de una cometa con esta forma?



4. ¿Es posible construir un cuadrilátero con un solo ángulo recto? ¿Y con dos? ¿Y con tres?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Suma de los ángulos de un pentágono



Mediante diagonales, descomponemos el pentágono en tres triángulos.

Los ángulos de cada uno de ellos suman 180°. Entre los tres, los ángulos suman $3 \cdot 180° = 540°$. Por tanto, los ángulos de todos los pentágonos suman 540°.

Los cinco ángulos de cualquier pentágono suman 540°.

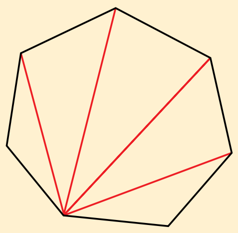
Por tanto, cada ángulo de un **pentágono regular** (todos sus ángulos son iguales) mide $540° : 5 = 108°$.

Ángulos de un polígono cualquiera

Como el pentágono, el hexágono se puede descomponer, mediante diagonales, en 4 triángulos. Sus ángulos sumarán, por tanto, $4 \cdot 180° = 720°$.

Así, en un hexágono regular, cada ángulo medirá $720° : 6 = 120°$.

Lo que hemos hecho con cuadriláteros, pentágonos y hexágonos, lo podemos generalizar para polígonos de n lados como vemos a continuación.



Un polígono de n lados se puede descomponer en $n - 2$ triángulos. La suma de todos sus ángulos es de $(n - 2) \cdot 180°$.

Cada ángulo de un polígono regular de n lados mide:

$$\frac{(n-2) \cdot 180°}{n}$$

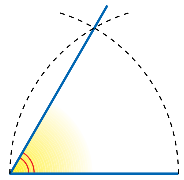
Piensa y practica

5. Averigua cuánto suman todos los ángulos de un decágono cualquiera y cuánto mide cada ángulo de un decágono regular. Hazlo de dos formas:

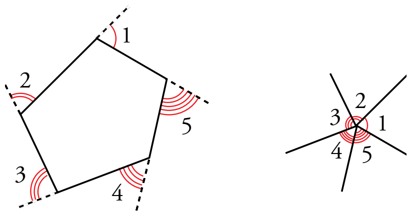
a) Volviendo a hacer todo el razonamiento: "Un decágono regular se puede descomponer en ocho triángulos…".

b) Aplicando las fórmulas anteriores.

6. Justifica que el ángulo así construido mide 60°.



7. Los ángulos señalados en rojo se llaman ángulos exteriores o externos del polígono.



Copia esta figura en un papel, recorta los ángulos externos, júntalos como ves en la figura de la derecha y comprueba que suman 360°.

8. Justifica que la suma de los ángulos exteriores de cualquier polígono es 360°.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

Operaciones con ángulos

1. Efectúa las siguientes sumas:

a) 15° 13' + 35° 23'

b) 18° 50' + 22° 15'

c) 25° 167' + 54° 40' + 13° 54'

2. Resuelve estas restas:

a) 180° 19' – 121° 52'

b) 143° 12' – 97° 24'

3. Haz los productos siguientes:

a) (58° 14') · 3

b) (37° 43') · 5

c) (62° 12') · 7

d) (5° 58') · 2

4. Resuelve estas divisiones:

a) (277° 34') : 11

b) (201° 52') : 8

c) (127° 55') : 5

d) (174° 30') : 6

5. Halla el complementario de los siguientes ángulos:

a) 45° 13'   b) 70° 52'

6. Halla, en cada caso, el suplementario del ángulo que se te da:

a) 93° 15'   b) 15° 02'

Construcciones con regla y compás

7. Traza un segmento de 6 cm y construye su mediatriz. ¿Qué propiedad tienen sus puntos?

8. Traza, con ayuda del transportador, un ángulo de 68° y construye su bisectriz. Comprueba que obtienes dos ángulos de 34°.

9. Dibuja, con ayuda del transportador, un triángulo rectángulo con un ángulo de 72°.

10. Construye un ángulo de 60° sin usar el transportador.

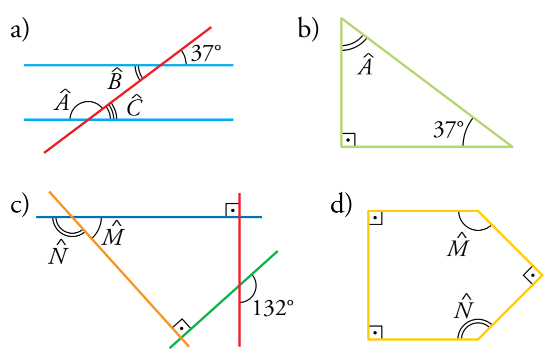
11. Construye un triángulo semejante al cartabón; es decir, sus ángulos deben medir 60°, 90° y 30°.

12. Dibuja dos semirrectas que tengan un segmento en común.

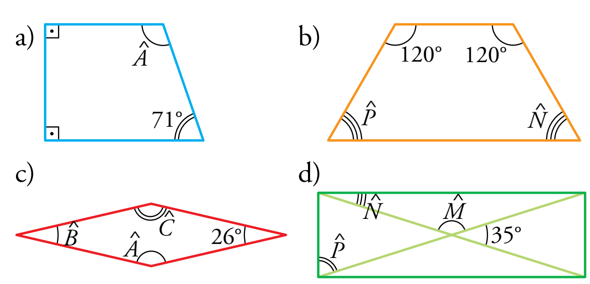
13. Dibuja dos semirrectas que estén sobre la misma recta y no tengan nada en común.

Relaciones angulares

14. Calcula el valor del ángulo o de los ángulos que se piden en cada figura:



15. Halla el valor de los ángulos desconocidos.



16. Piensa y contesta:

a) ¿Cuánto mide un ángulo equivalente a un cuarto de vuelta?

b) ¿Qué ángulo giras si das media vuelta?

c) Estás frente a la playa y a tu espalda está la montaña. ¿Qué verás si giras 360°?

d) ¿Cuántos ángulos de 45° equivalen a media vuelta?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

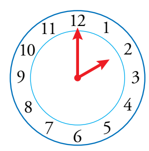
Ejercicios y problemas

Resuelve problemas

17. Halla, en grados y minutos, el ángulo interior de un heptágono regular. Calcula, también, su ángulo central.

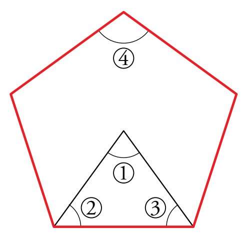
18. a) ¿Qué ángulo forman las agujas de un reloj a las 2 en punto?

b) ¿Y a las 5 en punto?



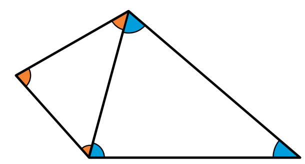
c) ¿Y a las 5 y cuarto? Ten en cuenta que la aguja horaria ha recorrido la cuarta parte del arco que va de 5 a 6.

19. ¿Cuánto mide cada uno de los cuatro ángulos señalados en este pentágono regular?

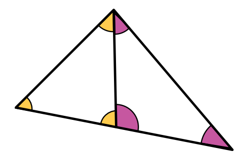


20. ¿Es posible dibujar un triángulo rectángulo con un ángulo de 100°? Dibújalo o explica por qué no puede existir.

21. Como la suma de los ángulos de cada triángulo es 180°, la suma de los ángulos de este cuadrilátero es 180° · 2 = 360°:

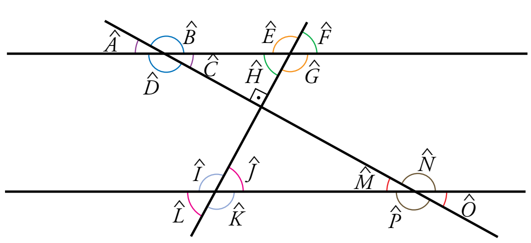


De la misma forma, ¿podríamos afirmar que al juntar estos dos triángulos se crea una figura cuya suma de ángulos es 180° · 2 = 360°?



Autoevaluación

1. Observa estos ángulos:



a) Identifica un ángulo recto, uno agudo y uno obtuso.

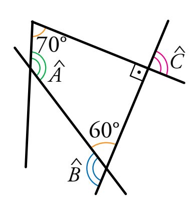
b) Escribe dos ángulos complementarios y dos suplementarios.

c) Indica dos ángulos opuestos por el vértice, dos correspondientes, dos alternos externos y dos alternos internos.

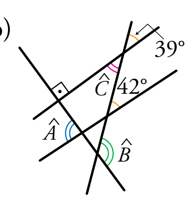
d) Sabiendo que $\hat{A}$ = 30°, halla el resto de ángulos.

2. Halla los valores de los ángulos indicados:

a)



b)



3. Realiza las siguientes operaciones con ángulos:

a) 13° 44' + 23° 38'

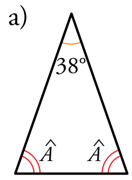
b) 26° 15' – 12° 32'

c) (32° 42') · 3

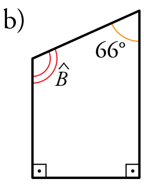
d) (23° 44') : 4

4. Calcula el valor de los ángulos indicados.

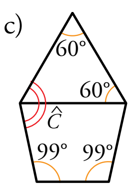
a)



b)



c)



Nombre y apellidos: .... Fecha: ....